Математичний турнір «Подільський занзібар»
20019 рік
9 клас
(Відповіді)

1. 7.

2. **<u>Відповідь:</u>**(0;0); (2;2); (1;2); (2;1); (1;0); (0;1).
Вказівка: помножимо ліву і праву частини на 2:

$$2x+2y=2x^2-2xy+2y^2$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)-2=0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$$

Далі розглядаємо всі можливі випадки, коли сума квадратів трьох цілих чисел може дорівнювати 2.

3.**<u>Відповідь:</u>** (1;4;2), (4;1;2).

$$\begin{cases} x+y+z=7, \\ x^2+y^2+z^2=21, \\ xy=z^2 \end{cases}$$

Ðîçâ`ÿçàííÿ

$$\begin{cases} x+y=7-z \\ (x+y)^2-2xy+z^2=21 \\ 2xy=2z^2 \end{cases}$$

ç óðàõóâàííÿì ïåðøîãî òà òðåòüîãî ð³âíÿíü , ìàºìî äðóãåð³âíÿííÿ :

$$(7-z)^2-2z^2+z^2=21$$

Розв`язавши це рівняння, маємо, що z = 2. Підставляючи дане значення до першого та третього рівнянь системи, знаходимо змінні x та y.

4. 48грн.48коп

5.**<u>Відповідь:</u> -0,2**
<u>Вказівка:</u> рівняння переписують у вигляді:

$$x^2-2x\sqrt{x^2-3x}+x^2-3x=1$$

$$(x-\sqrt{x^2-3x})^2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x^2-3x}=1 \\ x-\sqrt{x^2-3x}=-1 \end{array}\right.$$

Перше рівняння коренів не має. А коренем другого є -0,2.

6.**<u>Відповідь:</u>2,5.**
Скористатись теоремою Вієта.

$$x_1+x_2=1$$

$$x_1^2+x_2^2=2, \text{тоді } (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2,$$

$$1-2x_1x_2=2$$

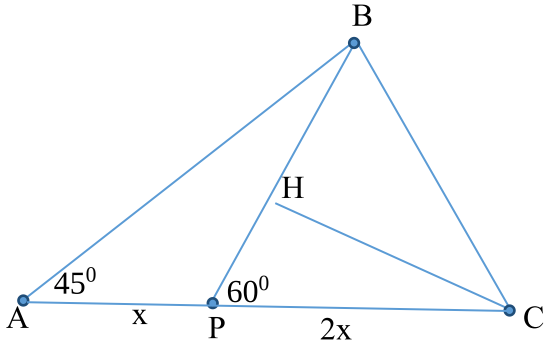
$$x_1x_2=-\frac{1}{2}$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=1\cdot(2+\frac{1}{2})=2\frac{1}{2}$$

7.**Відповідь: три точки.**

Дана фігура є паралелограмом, точка (0;0) – точка перетину його діагоналей.

8.**Відповідь: 75^0 .**



Проведемо CH $\perp$ BP. Тоді кут HCP дорівнює 30^0.
Отже, HP дорівнює половині PC і дорівнює AP.
Трикутник APH – рівнобедрений AP = PH, тому кути
HAP і AHP дорівнюють по 30^0.
Кут ABP дорівнює 15^0, тому кут HAP дорівнює 15^0 і тому трикутник AHP – рівнобедрений: AH = HB.
Трикутник AHC – рівнобедрений: AH = HC.
Маємо, що HB = HC. Тобто трикутник BHC – прямокутний і рівнобедрений, тому кут HCB дорівнює 45^0. Отже, кут BCP дорівнює $30^0 + 45^0 = 75^0$.

9. **Відповідь:** 142857

Вказівка: оскільки при множенні на 5 кількість цифр у числі не змінюється, то перша цифра – 1, а число може бути записане у вигляді $10^n + k$, $k < 10^n$.

Тоді за умовою $3 \cdot (10^n + k) = 10k + 1$, тобто $7k = 3 \cdot 10^n - 1$. Тому $(3 \cdot 10^n - 1) ⋮ 7$. Найменше n, при якому $(3 \cdot 10^n - 1) ⋮ 7$ дорівнює 5. При цьому k = 42857. Перевірка показує, що число 142857 задовольняє умову задачі.

10.**Відповідь:108см.**

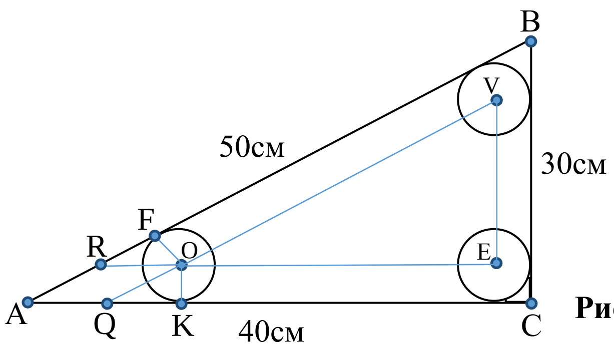


Рис. 2

Вказівка:
Трикутники ORFі OQK рівні за катетом і гострим кутом. Тому OR = OQ.
Трикутники OQK і BAC подібні за гострим кутом, тому OQ :AB = OK : BC, тобто QO : 50 = 1 : 30

QO = $\frac{5}{3}$, QK : AC = OK : BC, QK = $\frac{4}{3}$.

AK = AQ + QK=QO + QK=9(см);
OE = AC – AK – 1= 40 –3 - 1= 36 (см)
Трикутники ABC і OEVподібні. Знаходимо сторони трикутника OV = 45смі VE = 27см.
Тоді периметр цього трикутника дорівнює 108см.

11.**Відповідь: 9.**

Вказівка:

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$$

$$\frac{2(y-x)}{xy} = 1$$

$$xy = 2$$

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 1 + 8 = 9$$

12. **Відповідь:** 125 трикутників.

13.22.

14.45^0.

15.**Відповідь:** 1;2;5;6.

Вказівка: $x^2-7x+10=\dfrac{(2x-7)^2-9}{4}$

$x^2-7x+10=n^2$, то $(2x-7)^2-4n^2=9$; $(2x-7+2n)(2x-7-2n)=9$. Розглядаємо всі можливі розклади 9 на множники.

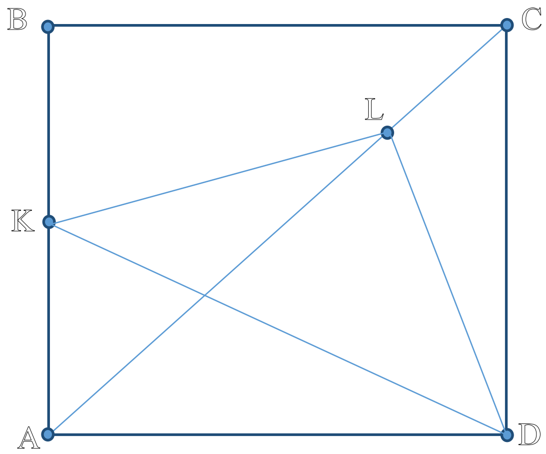
16.**Відповідь:** (8;8;8); (-10;-10;-10).

Вказівка: систему можна переписати у вигляді: $\begin{cases}(x+1)(y+1)=81,\\(x+1)(z+1)=81,\\(y+1)(z+10=81.\end{cases}$

Перемноживши рівняння, отримуємо: $(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=81^3$, тому $(x+1)(y+1)(z+1)=\pm9^3$. Поділивши це рівняння на кожне із рівнянь системи, маємо $x+1=\pm9$, $y+1=\pm9$; $z+1=\pm9$.

звідки і отримуємо розв`язки системи.

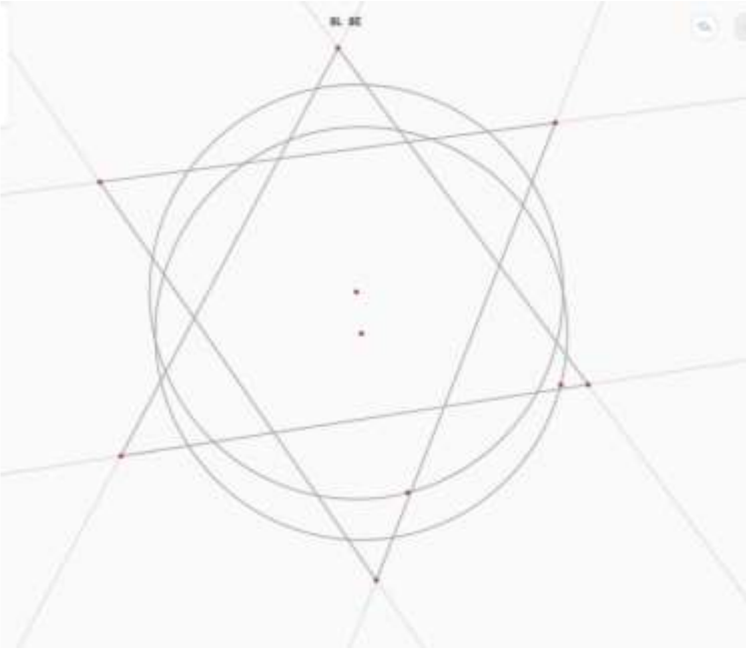
17. **Відповідь:90^0**.



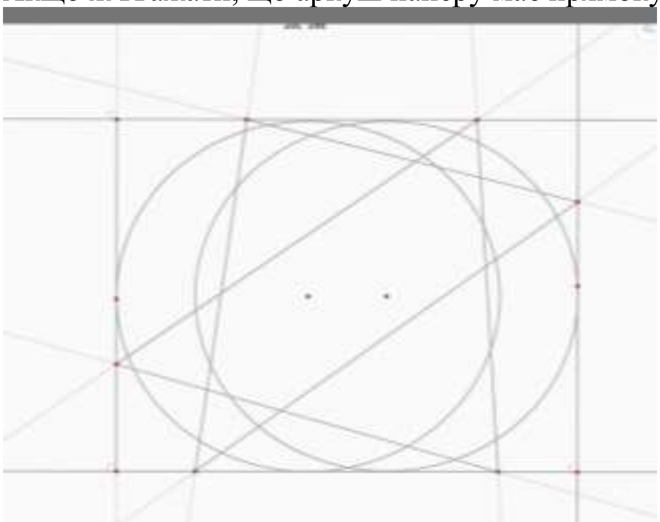
Вказівка:

Нехай АК = x, тоді AD = 2x, AC = $2x\sqrt{2}$, LC = $\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, AL = 3LC = $\dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$. За теоремою Піфагора для трикутника KAD KD$^2=5x^2$, за теоремою косинусів для трикутника AKL KL^2= $2{,}5x^2$, за теоремою косинусів для трикутника ALD LD^2 = $2{,}5x^2$. За теоремою косинусів для трикутника KLD кут KLD дорівнює 90^0.

18. **Відповідь:34 частини**.
Якщо листок паперу розглядати як необмежений, то можливе розташування можна побачити на малюнку:



Якщо ж вважати, що аркуш паперу має прямокутну форму і є обмеженим, то можливий випадок:



тоді частин може бути   і 45.

19.**Відповідь:1998**

Вказівка: сума внутрішніх кутів всіх трикутників дорівнює сумі кутів тисяче кутника та ще $360^0 \cdot 500$. Тому всіх трикутників буде: $\frac{180^0 \cdot (1000-2) + 360^0 \cdot 500}{180} = 1998$.

20. 75^0.

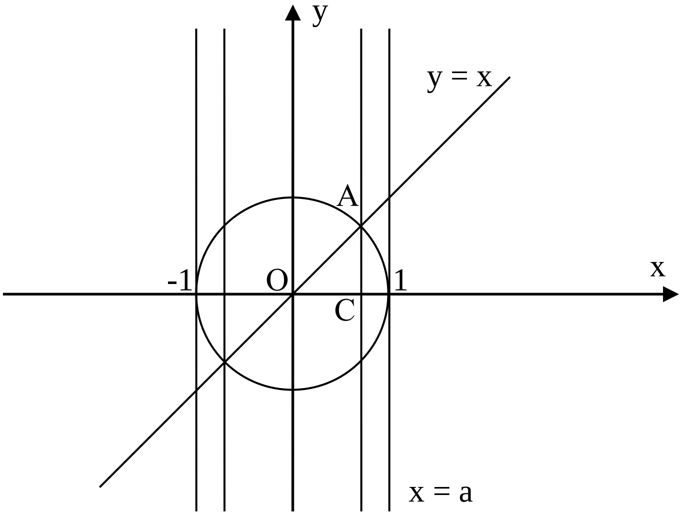
21.**Відповідь:** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \ \pm 1$. Вказівка: система розв`язується графічно.

$$\begin{cases} (y-x)(x-a)=0, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Побудуємо графіки кожного із рівнянь. Пряма x = a розміщена так, щоб коло і дві прямі перетинались рівно три рази. Таких випадків є чотири. В двох із них пряма x = a є дотичною до кола і тому a = 1 або a = -1.

Знайдемо значення a в третьому і четвертому випадку. Трикутник АОС прямокутний та рівнобедрений і

АО = 1, тому $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



22.**Відповідь:** $\sqrt{2}-1$

Вказівка: $4=\sqrt{4}+\sqrt{4}$,

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})}=$$

тому

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$